Egzamin z Rachunku prawdopodobieństwa II – 01.02.2024

Spośród poniższych zadań proszę wybrać 5. Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 12 punktów. W przypadku oddania 6 zadań, do oceny będzie się liczyć 5 ocenionych najniżej. Rozwiązania poszczególnych zadań proszę oddawać na oddzielnych kartkach, podpisanych czytelnie imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Odpowiedzi proszę udzielać w postaci zwartych wzorów. Mogą być wyrażone w terminach dystrybuanty standardowej zmiennej gaussowskiej. Należy precyzyjnie uzasadniać rozwiązania, powołując się na odpowiednie fakty z wykładu lub ćwiczeń.

A1 Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi i.i.d. o gęstości $g(x) = (x+1)^{-2}1_{[0,\infty)}(x)$. Dla $n = 1, 2, \ldots$ zdefiniujmy

$$Y_n = \frac{1}{n} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} (X_i - i).$$

Czy ciąg $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ zbiega według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

A2 Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi, X o rozkładzie $N(0,1)$, Y, Z o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Wykazać, że $X\sqrt{2Y}$ ma taki sam rozkład jak $Y - Z$.

A3 Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Dla $n = 1, 2, \ldots$, niech

$$Z_n = \sqrt{X_1 + \ldots + X_n} \sin\left(\frac{X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \ldots + X_{2n-1} - X_{2n}}{n}\right)$$

Dla $t \in \mathbb{R}$ zbadać istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant t)$. Jeśli granica istnieje – wyznaczyć ją, w przeciwnym wypadku uzasadnić brak zbieżności.

Wskazówka: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

A4 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Zdefiniujmy ciąg zmiennych losowych

$$S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Niech ponadto dla $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$.

a) Wyznaczyć wszystkie liczby $b, c \in \mathbb{R}$, takie że ciąg $M_n = S_n^4 - 6nS_n^2 + bn^2 + cn$, $n \geqslant 0$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Dla dodatniej liczby całkowitej a, niech $\tau = \inf\{n \geqslant 0\colon |S_n| = a\}$. Wyznaczyć średnią i wariancję τ.

A5 Czterej agenci, James, Hans, Ethan i George podróżują między Londynem, Berlinem, Nowym Jorkiem i Warszawą. W dniu „zero” każdy z nich jest w innym mieście. Każdego kolejnego dnia jeden z nich, wybrany losowo (z równymi prawdopodobieństwami), opuszcza miasto w którym przebywa i przemieszcza się do jednego z pozostałych miast, przy czym prawdopodobieństwo wyboru każdego z tych pozostałych miast jest wprost proporcjonalne do liczby znajdujących się w nim w tym momencie agentów.

a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem jeden cała czwórka spotka się w jednym mieście.

b) Niech T oznacza oczekiwaną liczbę dni, które upłyną do spotkania. Obliczyć $\mathbb{E}T$.

A6 W urnie są dwie kule: biała i czerwona. Powtarzamy wielokrotnie następujący eksperyment. Losujemy jedną kulę z urny; jeżeli wylosowana kula jest biała, to z prawdopodobieństwem 1/3 zastępujemy ją w urnie kulą czerwoną, a z prawdopodobieństwem 2/3 odkładamy z powrotem do urny; jeżeli wylosowana kula jest czerwona, to z prawdopodobieństwem 1/2 zastępujemy ją w urnie kulą białą, zaś z prawdopodobieństwem 1/2 odkładamy do urny. Niech X_n oznacza liczbę kul białych w urnie po n-tym powtórzeniu eksperymentu. Czy ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega według rozkładu? Jeżeli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

Egzamin z Rachunku prawdopodobieństwa II – 01.02.2024

Spośród poniższych zadań proszę wybrać 5. Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 12 punktów. W przypadku oddania 6 zadań, do oceny będzie się liczyć 5 ocenionych najniżej. Rozwiązania poszczególnych zadań proszę oddawać na oddzielnych kartkach, podpisanych czytelnie imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Odpowiedzi proszę udzielać w postaci zwartych wzorów. Mogą być wyrażone w terminach dystrybuanty standardowej zmiennej gaussowskiej. Należy precyzyjnie uzasadniać rozwiązania, powołując się na odpowiednie fakty z wykładu lub ćwiczeń.

B1 Niech $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ będą zmiennymi i.i.d. o gęstości $g(x) = (x+1)^{-2}1_{[0,\infty)}(x)$. Dla $n = 1, 2, \ldots$ zdefiniujmy

$$Z_n = \frac{1}{n} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} (Y_i - i).$$

Czy ciąg $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ zbiega według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

B2 Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi, X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1, Z o rozkładzie $N(0, 1)$. Wykazać, że $Z\sqrt{2X}$ ma taki sam rozkład jak $X - Y$.

B3 Zmienne $Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne, o rozkładzie wykładniczym z parametrem 3. Dla $n = 1, 2, \ldots,$ niech

$$X_n = \sqrt{Y_1 + \ldots + Y_n} \sin\left(\frac{Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 + \ldots + Y_{2n-1} - Y_{2n}}{n}\right)$$

Dla $t \in \mathbb{R}$ zbadać istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant t)$. Jeśli granica istnieje – wyznaczyć ją, w przeciwnym wypadku uzasadnić brak zbieżności.

Wskazówka: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

B4 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi że $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Zdefiniujmy ciąg zmiennych losowych

$$S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Niech ponadto dla $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$.

a) Wyznaczyć wszystkie liczby $a, b \in \mathbb{R}$, takie że ciąg $M_n = S_n^4 - 6nS_n^2 + an^2 + bn$, $n \geqslant 0$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Dla dodatniej liczby całkowitej c, niech $\tau = \inf\{n \geqslant 0\colon |S_n| = c\}$. Wyznaczyć średnią i wariancję τ.

B5 Czterej agenci, Kim, Julius, Aldrich i Tomek podróżują między Londynem, Wiedniem, Nowym Jorkiem i Warszawą. W dniu „zero" każdy z nich jest w innym mieście. Każdego kolejnego dnia jeden z nich, wybrany losowo (z równymi prawdopodobieństwami), opuszcza miasto w którym przebywa i przemieszcza się do jednego z pozostałych miast, przy czym prawdopodobieństwo wyboru każdego z tych pozostałych miast jest wprost proporcjonalne do liczby znajdujących się w nim w tym momencie agentów.

a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem jeden cała czwórka spotka się w jednym mieście.

b) Niech T oznacza oczekiwaną liczbę dni, które upłyną do spotkania. Obliczyć $\mathbb{E}T$.

B6 W urnie są dwie kule: biała i czerwona. Powtarzamy wielokrotnie następujący eksperyment. Losujemy jedną kulę z urny; jeżeli wylosowana kula jest czerwona to z prawdopodobieństwem 1/3 zastępujemy ją w urnie kulą białą, a z prawdopodobieństwem 2/3 odkładamy z powrotem do urny; jeżeli wylosowana kula jest biała, to z prawdopodobieństwem 1/2 zastępujemy ją w urnie kulą czerwoną, zaś z prawdopodobieństwem 1/2 odkładamy do urny. Niech X_n oznacza liczbę kul białych w urnie po n-tym powtórzeniu eksperymentu. Czy ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega według rozkładu? Jeżeli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.